МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.953

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

Меач Мон

Существование классического решения математической модели, описывающей некоторый процесс в среде с особенностями, которые приводят к потере гладкости у решения, очень важны для приложений. В работе используется поточечный подход к трактовке решения, предложенный Ю.В. Покорным в 1999 году. Этот подход показал свою эффективность не только при изучении линейных одномерных краевых задач, но и нелинейных.

Ключевые слова: *математическая модель, стилтьесовская струна, собственные колебания, вынужденные колебания, корректность модели.*

Введение. Для приложений важно знать значение решения в каждой точке, а для анализа решения – и ее производных до некоторого порядка. В то же время наличие локализованных особенностей у внешней среды (типа пружины), сосредоточенных сил у внешней силы и внутренних особенностей системы, как правило, приводит к потере гладкости у решения. Применение теории обобщенных функций к данным задачам не дает нужного эффекта, так как проявляется ряд трудно разрешимых проблем. Во-первых, возникает необходимость умножения обобщенной функции на разрывную, а это проблема не решена до сих пор. Во-вторых, при обобщенной трактовке исследователь может гарантировать наличие только слабого решения, что в приложениях не дает требуемой информации.

Мы используем поточечный подход, предложенный Ю.В. Покорным [1] в 1999 году и показавший свою эффективность в одномерных задачах [2–9].

1. Проблема разрешимости математической модели малых колебаний стилтьесовой струны. В этом параграфе доказывается, что при определенных условиях на начальные данные и $f(x,t)$ решение математической модели

$$\begin{cases} M_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

существует в классе E – функций $u(x,t)$ непрерывных по совокупности переменных, сама функция $u(x,t)$ и ее производная $u'_x(x,t)$ при всех фиксированных x имеют непрерывные производные до второго порядка по переменной t; при каждом t $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по переменной x на отрезке $[0;\ell]$; первая производная $u'_x(x,t)$ – σ–абсолютно непрерывна по переменной x для всякого фиксированного t.

Уравнение в (1) задано при всех (x,t), принадлежащих декартовому произведению множеств $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ и $[0;T]$. Первое множество строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ – множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру σ.

Меач Мон, аспирант,
Воронежский государственный университет;
Россия, г. Воронеж, e-mail: meach_mon@yahoo.com

На $[0;\ell]$ введем метрику $\rho(x;y)=|\,\sigma(x)-\sigma(y)\,|$. Достаточно очевидно, что $0;\ell\;,\rho$ – неполное метрическое пространство. Стандартное пополнение (с точностью до изоморфизма) приводит к множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\xi-0;\xi;\xi+0$.

Пусть $G(x,s)$ – функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} Lv\equiv-\dfrac{d}{d\sigma}\left(p(x)\dfrac{dv}{dx}\right)+v\dfrac{dQ}{d\sigma}=\dfrac{dF}{d\sigma}, \\ v(0)=v(\ell)=0, \end{cases}$$

существование и единственность которой доказаны в работах [2], [3].

Тогда, разрешимость математической модели (1) эквивалентна разрешимости системы

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^\ell G(x,s)\left[M_\sigma(s)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)-f(s,t)\right]d\sigma(s)=u(x,t), \\ u(x,0)=\varphi_0(x), \\ u_t(x,0)=\varphi_1(x). \end{cases} \tag{2}$$

Проинтегрировав дважды по переменной t в пределах от 0 до t получим, что разрешимость (2) эквивалентна разрешимости в E уравнения Фредгольма первого рода

$$(Au)(x,t)=z(x,t), \tag{3}$$

где

$$(Au)(x,t)=\int_0^\ell G(x,s)u(s,t)\,dM(s)+\int_0^t(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau \tag{4}$$

и

$$z(x,t)=\int_0^\ell G(x,s)\left[\varphi_0(s)+t\varphi_1(s)+\int_0^t(t-\tau)f(s,\tau)\,d\tau\right]d\sigma(s). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (3) имеет решение в E, если функция $z(x,t)$ образует множества E, т. е. $z\in AE$.

Единственность классического решения математической модели (1) доказана А.В. Баевым [10].

2. Корректность математической модели малых колебаний струны с произвольным распределением масс. В этом параграфе показывается, что при малом изменении начальных условий $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ соответствующее решение математической модели

$$\begin{cases} M_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-u\dfrac{dQ}{d\sigma}+f(x,t), \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi_0(x), \\ u_t(x,0)=\varphi_1(x), \end{cases} \tag{6}$$

изменяется мало.

Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения модели (6) при начальных данных $\varphi_0^{(1)}(x)$, $\varphi_1^{(1)}(x)$ и $\varphi_0^{(2)}(x)$, $\varphi_1^{(2)}(x)$ соответственно, т. е. решения моделей

$$\begin{cases} M_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-u\dfrac{dQ}{d\sigma}+f(x,t), \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi_0^{(i)}(x), \\ u_t(x,0)=\varphi_1^{(i)}(x), \end{cases} \tag{7}$$

($i=1,2$). Обозначим через $u(x,t)$ их разность: $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$.

Также как и при доказательстве единственности решения математической модели, для функции $u(x,t)$ рассмотрим интеграл

$$\int_0^{T^*}\int_0^\ell\frac{\partial u}{\partial t}\left(M_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+uQ_\sigma\right)d\sigma\,dt, \tag{8}$$

который равен нулю.

С другой стороны, разбивая интеграл (8) на три, интегрируя второй интеграл по частям и применяя те же рассуждения, что и в работе [10], будем иметь

$$\int_0^{T^*}\int_0^\ell\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}M_\sigma(x)-\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u\frac{dQ}{d\sigma}\right)d\sigma\,dt=$$

$$\frac12\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)^2\right]dM(x)-\int_0^{T^*}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0}^{x=\ell}-\int_0^\ell\frac{\partial u}{\partial x}d_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]dt+\frac12\int_0^\ell\left(u^2(x,T^*)-u^2(x,0)\right)dQ(x)=$$

$$=\frac12\int_0^{T^*}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2dM(x)-\frac12\int_0^\ell\varphi_1^2(x)\,dM(x)+\frac12\int_0^\ell p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,T^*)\right)^2dx-\frac12\int_0^\ell p(x)\varphi_0^{\prime 2}(x)\,dx+$$

$$+\frac12\int_0^\ell u^2(x,T^*)\,dQ(x)-\frac12\int_0^\ell\varphi_0^2(x)\,dQ(x),$$

так как $u(x,0)=\varphi_0(x)$, $u_x(x,0)=\varphi_{0\,x}(x)$, $u_t(x,0)=\varphi_1(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0$ в силу граничных условий. Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T^*)\right)^2 dM(x)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\ell p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,T^*)\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell u^2(x,T^*)\,dQ(x)= \tag{9}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\ell \varphi_1^2(x)\,dM(x)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\ell p(x)\varphi_0'^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell \varphi_0^2(x)\,dQ(x),$$

из которого следует, что левая часть мала, так как по условию правая часть мала. Обозначая через ε правую часть равенства (9), найдем, что для всякого $T^*\in[0,T]$ и каждого $x\in[0;\ell]$ будем иметь

$$\int_0^x\left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,T^*)\right)^2 dM(s)\le\varepsilon \qquad (x\in\overline{[0;\ell]}_S) \tag{10}$$

и

$$\int_0^x p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(s,T^*)\right)^2 ds\le\varepsilon.$$

Покажем, что для всех $x\in[0;\ell]$ и $T^*\in[0;T]$ величина $|u(x,T^*)|$ мала, если ε мало. Имеем (после применения неравенства Коши–Буняковского)

$$|u(x,T^*)|\le\left(\int_0^x 1^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^x\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,T^*)\right)^2 ds\right)^{1/2}\le$$
$$\le\sqrt{\ell}\left(\int_0^\ell\left(\frac{\partial u}{\partial x}(s,T^*)\right)^2\frac{ds}{p(s)}\right)^{1/2}\le\sqrt{\frac{\ell}{c_0}}\sqrt{\varepsilon},$$

где $c_0=\min\limits_{x\in[0;\ell]_S}p(x)>0$. Таким образом, из последнего неравенства и следует требуемое. Другими словами, показана корректность математической модели малых вынужденных колебаний стилтьесовской струны.

Заключение. В работе доказана корректность математической модели вынужденных малых колебаний струны с произвольным распределением масс, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями. Корректность модели позволяет утверждать: задача нечувствительна к незначительным изменениям начальных данных, что позволяет применять различные численные схемы нахождения приближенного решения, как, например, в работах [11]—[15].

Библиографический список

1. **Покорный, Ю. В.** Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // ДАН. – 1999. – Т. 364. – № 2. – С. 167-169.

2. **Покорный, Ю. В.** Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63. – Вып. 1 (379). – С. 98–141.

3. **Осцилляционный метод Штурма** в спектральных задачах / Покорный Ю.В. [и др.] – М.: Физматлит, 2009. – 192 с.

4. **Покорный, Ю. В.** О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. – 2007. – Т. 82. – № 4. – С. 578-582.

5. **Pokornyi, Yu. V.** An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov, A.S. Ishchenko // Mathematical Notes. – 2007. – Т. 82. – № 3-4. – С. 518-521.

6. **Pokornyi, Yu. V.** Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – Т. 119. – № 6. – С. 769-787.

7. **Давыдова, М.Б.** О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров // Известия Саратов-

References

1. **Pokornyiy, Yu. V.** Integral Stiltesa i proizvodnyie po mere v obyiknovennyih differentsialnyih uravneniyah / Yu.V. Pokornyiy // DAN. – 1999. – T. 364. – № 2. – S. 167-169.

2. **Pokornyiy, Yu. V.** Ostsillyatsionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impulsnyih zadach / Yu. V. Pokornyiy, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Uspehi matematicheskih nauk. – 2008. – T. 63. – Vyip. 1 (379). – S. 98–141.

3. **Ostsillyatsionnyiy metod Shturma** v spektralnyih zadachah / Pokornyiy Yu.V. i dr. – M.: Fizmatlit, 2009. – 192 s.

4. **Pokornyiy, Yu. V.** O neregulyarnom rasshirenii ostsillyatsionnoy teorii spektralnoy zadachi Shturma-Liuvillya / Yu. V. Pokornyiy, M. B. Zvereva, A. S. Ischenko, S. A. Shabrov // Matematicheskie zametki. – 2007. – T. 82. – № 4. – S. 578-582.

5. **Pokornyi, Yu. V.** An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu.V. Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov, A.S. Ishchenko // Mathematical Notes. – 2007. – T. 82. – № 3-4. – S. 518-521.

6. **Pokornyi, Yu. V.** Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – T. 119. – № 6. – S. 769-787.

7. **Davyidova, M. B.** O chisle resheniy nelineynoy kraevoy zadachi s integralom Stiltesa / M.B. Davyidova, S.A. Shabrov // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika.

ского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – № 4. – С. 13–17.

8. **Давыдова, М. Б.** О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 155-160.

9. **Шабров, С. А.** Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 232-250.

10**. Баев, А. Д.** О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 50-55.

11. **Зверева, М. Б.** Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 97–105.

12. **Шепилова, Е. В.** О решении уравнения типа Шредингера с постоянным оператором проекционно-разностным методом со схемой Кранка-Николсон по времени / Е. В. Шепилова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 2. – С. 141-146.

13. **Нгуен Тьонг Хуен** Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / Нгуен Тьонг Хуен // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 202-208.

14. **Сотников, Д. С.** Сходимость в сильных нормах проекционно-разностного метода для квазилинейного параболического уравнения / Д.С. Сотников // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 2. – С. 126-133.

15. **Сотников, Д. С.** Сходимость проекционно-разностного метода для квазиленейных параболических задач в условиях обобщенной разрешимости / Д.С. Сотников // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 1. – С. 170-176.

Mehanika. Informatika. – 2011. – T. 11. – № 4. – S. 13–17.

8. **Davyidova, M. B.** O nelineynyih teoremah sravneniya dlya differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s proizvodnyimi Radona-Nikodima / M. B. Davyidova, S. A. Shabrov // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2013. – № 1. – S. 155-160.

9. **Shabrov, S. A.** Ob odnoy matematicheskoy modeli malyih deformatsiy sterzhnevoy sistemyi s vnutrennimi osobennostyami / S. A. Shabrov // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2013. – № 1. – S.232-250.

10. **Baev, A. D.** O edinstvennosti resheniya matematicheskoy modeli vyinuzhdennyih kolebaniy strunyi s osobennostyami / A. D. Baev, S. A. Shabrov, Meach Mon // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2014. – № 1. – S.50-55.

11. **Zvereva, M. B.** Ob adaptatsii metoda konechnyih elementov dlya resheniya granichnoy zadachi s differentsialami Stiltesa na geometricheskom grafe / M. B. Zvereva, S. A. Shabrov, E. V. Lyilov // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2014. – № 1. – S.97–105.

12. **Shepilova, E. V.** O reshenii uravneniya tipa Shredingera s postoyannyim operatorom proektsionno-raznostnyim metodom so shemoy Kranka-Nikolson po vremeni / E. V. Shepilova // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2011. – № 2. – С.141-146.

13. **Nguen Tyiong Huen** Shodimost proektsionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s integralnyim usloviem na reshenie / Nguen Tyiong Huen // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2011. – № 1. – С. 202-208.

14. **Sotnikov, D. S.** Shodimost v silnyih normah proektsionno-raznostnogo metoda dlya kvazilineynogo parabolicheskogo uravneniya / D.S. Sotnikov // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2009. – № 2. – С. 126-133.

15. **Sotnikov, D. S.** Shodimost proektsionno-raznostnogo metoda dlya kvazileneynyih parabolicheskih zadach v usloviyah obobschennoy razreshimosti / D.S. Sotnikov // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. – 2009. – № 1. – С. 170-176.

ABOUT THE CORRECTNESS OF MATHEMATICAL MODELS OF SMALL TRANSVERSE VIBRATIONS STYLESOURCE STRINGS WITH ARBITRARY MASS DISTRIBUTION

Meach Mon
graduate student,
Voronezh State University,
Russia, Voronezh,
e-mail: meach_mon@yahoo.com

Existence of a classical solution of a mathematical model describing the process in some environments with features that lead to the loss of smoothness of the solution, it is very important for applications. In this paper we use the pointwise approach proposed Yu.V. Porornii in 1999, to the interpretation of solutions. This approach has been shown to be effective not only in the study of linear one-dimensional boundary value problems, but also non-linear. In the first section of the paper, we obtain sufficient conditions for the existence of a mathematical model of the studied solutions. The second section is devoted to the proof of the continuous dependence on the initial conditions.

Keywords: *Mathematical model, Stieltjes String, natural oscillations, forced oscillations, correctness model.*

15 – 21 сентября 2014 года состоится VII Международная научная конференция **«Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий»**, организованная Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургским государственным университетом, Воронежским государственным университетом, Воронежским государственным техническим университетом, Пермским национальным исследовательским политехническим университетом, Пермским государственным национальным исследовательским университетом, Воронежским институтом ГПС МЧС России, Тамбовским государственным техническим университетом. Во время ее работы планируется проведение

V Международной научно-практической конференции
«Пожарная безопасность: проблемы и перспективы».

На конференции предполагается работа по следующим направлениям:

– Математическое моделирование, управление чрезвычайными ситуациями и оценка риска.
– Технологии обеспечения оперативно-служебной деятельности Государственной противопожарной службы. Актуальные проблемы обеспечения пожарной безопасности.
– Технологии тушения пожаров и спасения людей.
– Социально-гуманитарные науки: теоретические подходы, эмпирические исследования, практические решения.
– Технологии контроля и прогнозирования свойств веществ, материалов и изделий.
– Информационно-психологическая безопасность, медицинское обеспечение ликвидации последствий ЧС.
– Технологии гражданской защиты. Системы пожарного мониторинга.
– Теоретико-методологические основы анализа и управления кадрового, правового и психологического обеспечения в системе МЧС России.

По результатам конференции планируется издание сборника материалов и электронная публикация докладов участников на сайте института: http://www.vigps.ru, http://вигпс.рф.

Регистрационный взнос не предусмотрен.

По всем вопросам обращаться в оргкомитет конференции по адресам:
Электронный: vigps_onirio@mail.ru
Почтовый: 394052, г. Воронеж, ул. Краснознаменная, 231.
Телефоны: (473) 277-86-53, (473) 236-33-05 – дежурная часть;
(473)242-12-63 – организационно-научный и редакционно-издательский отдел (Шимон Николай Степанович – начальник отдела; Никитская Людмила Михайловна – научный сотрудник).