УДК 517.95

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

А. С. Рябенко

В работе рассматриваются три задачи, описывающие стационарное распределение тепла в плоскости без тепловых источников и с трещиной в случае, когда коэффициент внутренней теплопроводности постоянен, равен экспоненциальной функции и равен произвольной функции, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям. Во всех рассмотренных задачах трещина моделируется отрезком, предполагаются заданными разности температур и тепловых потоков между верхним и нижним берегами трещины. Показано, что все рассмотренные задачи имеют решение. В случае, когда коэффициент внутренней теплопроводности постоянен и равен экспоненциальной функции, выписаны явные формулы решения. Во всех рассмотренных задачах получены асимптотические представления тепловых потоков в окрестности концов трещины. Доказано совпадение главных членов асимптотического разложения тепловых потоков во всех рассмотренных задачах. Также показано, что скорость стремления тепловых потоков к бесконечности зависит от способа приближения к концам трещины.

Ключевые слова: *трещина, тепловой поток, сингулярность, стационарное распределение тепла, обобщенное решение, асимптотики, стационарная теплопроводность.*

Введение. Одним из направлений в изучении материалов с трещинами является изучение тепловых процессов в этих материалах (см. [1-7]). Диапазон таких задач очень широк и во многом определяется свойствами и конфигурацией материалов, количеством трещин и их способом расположения, а также математическим объектом, моделирующим трещины.

В работе рассматриваются три задачи, моделирующие стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной l при различных способах задания коэффициента внутренней теплопроводности. Во всех рассмотренных задачах трещина l моделируется отрезком $[-1;1]\times\{0\}$, предполагаются заданными разности температур и тепловых потоков между верхним и нижним берегами трещины l.

Уравнения рассмотренных в статье задач получены из уравнения стационарной теплопроводности для материала без тепловых источников:

$$\operatorname{div}(G(x)\operatorname{grad}u(x))=0,$$

где $x=(x_1,x_2)$, а $G(x)$ – коэффициент внутренней теплопроводности.

Рябенко А.С., канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей,
Воронежский государственный университет
Россия, г. Воронеж.
E-mail: alexr-83@yandex.ru

Задача (1)-(3) получена в предположении, что $G(x)=k\equiv const$; задача (8)-(10) получена в предположении, что $G(x)=G(x_2)=G_0e^{kx_2}$, где $G_0\equiv const\neq 0,\ k\equiv const\neq 0$; задача (18)-(20) получена в предположении, что $G(x)=G(x_2)=e^{k(x_2)}$, где функция $k(x_2)$ удовлетворяет условиям, сформулированным ниже. Отметим, что задача (8)-(10) является частным случаем задачи (18)-(20).

Изучение задачи (1)-(3) и задачи (8)-(10) проводилось по следующей схеме: сведение исходной задачи к обобщенной задаче, построение решения получившейся обобщенной задачи; выделение в представлении производных первого порядка решения обобщенной задачи компонентов, которые быстрее всего стремятся к бесконечности при приближении к концам трещины (получение асимптотического представления для тепловых потоков); доказательство того, что построенное решение обобщенной задачи является решением рассматриваемой задачи.

Задача (18)-(20) исследовалась при помощи сведения к задаче (8)-(10).

Стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной при постоянном коэффициенте внутренней теплопроводности. Рассмотрим задачу

$$\Delta v(x_1,x_2)=0,\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/l, \tag{1}$$

$$v(x_1,+0)-v(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in(-1;1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in(-1;1). \tag{3}$$

Определение. Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $v(x_1,x_2)$, принадлежащую $\tilde{N}^2\left(\mathbb{R}^2/l\right)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $\mathbb{R}^2/l$, для которой в смысле главного значения при x_1, принадлежащем $(-1;1)$, выполнены граничные условия (2), (3), и такую, что функции $v(x_1,x_2),\ \ x_2\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$ ограничены в окрестности трещины l.

Аналогичным образом определяется решение остальных задач, рассматриваемых в статье.

Определение. Пусть $q(x_1)$ принадлежит пространству $\tilde{N}\left([-1;1]\right)$. Через $q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)$ будем обозначать обобщенную функцию из $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$, действующую по следующему правилу: для любой функции $\varphi(x_1,x_2)$, принадлежащей пространству $D\left(\mathbb{R}^2\right)$,

$$\left(q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2),\varphi(x_1,x_2)\right)=\int_{-1}^{1}q(\sigma_1)\varphi(\sigma_1,0)d\sigma_1 .$$

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $\tilde{N}^3\left([-1;1]\right)$.

Из определения решения задачи (1)-(3) следует, что функция $v(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$. Вычислив стандартным образом обобщенные производные от функции $v(x_1,x_2)$ (см. [8]), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Решение задачи (1)-(3) является решением следующей обобщенной задачи:

$$\Delta v(x_1,x_2)=q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right). \tag{4}$$

Замечание 2. Фундаментальным решение оператора Δ в $\mathbb{R}^2$ является функция $E(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|$ (см. [9]).

Замечание 3. Обобщенная функция $q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)$ финитна (см. [8]), и для нее $\operatorname{supp} q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\subset l$.

Воспользовавшись замечанием 2, замечанием 3 и теоремой о свертке с финитным функционалом (см. [8]), можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $q_0(x_1),\ q_1(x_1)\in\tilde{N}\left([-1;1]\right)$, тогда решение задачи (4) представимо в виде

$$\begin{aligned}v(x_1,x_2)=\frac{x_2}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}d\sigma_1+\\+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}q_1(\sigma_1)\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]d\sigma_1\end{aligned}. \tag{5}$$

Используя (5) и интегрирование по частям, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Для частных производных первого порядка функции $v(x_1,x_2)$, полученной в теореме 2, при (x_1,x_2), принадлежащем $\mathbb{R}^2/l$, справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}+\\+\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}-\\-\frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]+\\+\frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_1(x_1,x_2),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2}-\\-\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}+\\+\frac{q_0'(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]-\frac{q_0'(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+\\+x_2^2]+R_2(x_1,x_2),\end{aligned} \tag{7}$$

где $R_1(x_1,x_2)$, $R_2(x_1,x_2)$ – ограниченные на любом компакте функции.

Используя теорему 2 и теорему 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Функция $v(x_1,x_2)$, построенная в теореме 2, принадлежит пространству $\tilde{N}^\infty\left(\mathbb{R}^2/l\right)$ и является решением задачи (1)-(3).

Более подробное исследование задачи (1)-(3) содержится в [10].

Стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной при экспоненциальном коэффициенте внутренней теплопроводности. Рассмотрим задачу.

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{u}(x_1,x_2)+k\frac{\partial\tilde{u}(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0,\\x=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2/l,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x_1,+0)-\tilde{u}(x_1,-0)=q_0(x_1),\\x_1\in(-1;1),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k}{2}\tilde{u}(x_1,+0)-$$
$$-\frac{\partial \tilde{u}(x_1,-0)}{\partial x_2}-\frac{k}{2}\tilde{u}(x_1,-0)= \qquad (10)$$
$$=q_1(x_1),\ x_1\in(-1;1).$$

При помощи замены $\tilde{u}(x_1,x_2)=e^{-\frac{kx_2}{2}}\tilde{V}(x_1,x_2)$ задача (8)-(10) сводится к задаче

$$\Delta\tilde{V}(x_1,x_2)-\frac{k^2}{4}\tilde{V}(x_1,x_2)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^2\setminus l, \qquad (11)$$
$$\tilde{V}(x_1,+0)-\tilde{V}(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in(-1;\,1), \qquad (12)$$
$$\frac{\partial\tilde{V}(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial\tilde{V}(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in(-1;\,1). \qquad (13)$$

По аналогии с теоремой 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Решение задачи (11)-(13) является решением следующей обобщенной задачи:

$$\Delta\tilde{V}(x_1,x_2)-\frac{k^2}{4}\tilde{V}(x_1,x_2)=$$
$$=q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)+ \qquad (14)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\Big)$$

В дальнейшем через $K_n(z)$ будем обозначать функции Макдональда (см. [11, 12]).

Замечание 4. Фундаментальным решением оператора $\Delta-\frac{k^2}{4}$ в $\mathbb{R}^2$ является функция $E(x_1,x_2)=-\frac{1}{2\pi}K_0(\frac{|k|}{2}|x|)$ (см. [9]).

Действуя так же, как в теореме 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. Пусть $q_0(x_1),\ q_1(x_1)\in\tilde{N}\big([-1;1]\big)$, тогда решение задачи (14) представимо в виде

$$\tilde{V}(x_1,x_2)=$$
$$=\frac{|k|x_2}{4\pi}\int_{-1}^{1}K_1\left(\frac{|k|}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)\frac{q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-\sigma_1)^2}}d\sigma_1- \qquad (15)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K_0(\frac{|k|}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2})q_1(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Действуя так же, как в теореме 3, из (15) и асимптотических оценок для функций Макдональда (см. [11, 12]),

$$K_0(z)=\ln\frac{1}{z}+O(1),\ \ K_n(z)=\frac{1}{2}\frac{(n-1)!}{(z/2)^n}+O(z^{2-n}),$$

где $0<z<1,\ n\in\mathrm{N}$, получаем следующую теорему.

Теорема 7. Для частных производных первого порядка функции $\tilde{V}(x_1,x_2)$, полученной в теореме 6, при (x_1,x_2), принадлежащем $\mathbb{R}^2/l$, справедливы следующие представления:

$$\frac{\partial\tilde{V}(x_1,x_2)}{\partial x_1}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}+$$
$$+\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}-$$
$$-\frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]+ \qquad (16)$$
$$+\frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_1(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial\tilde{V}(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2}-$$
$$-\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}+$$
$$+\frac{q_0'(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]- \qquad (17)$$
$$-\frac{q_0'(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_2(x_1,x_2),$$

где $R_1(x_1,x_2)$, $R_2(x_1,x_2)$ – ограниченные на любом компакте функции.

Используя теорему 6 и теорему 7, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. Функция $\tilde{V}(x_1,x_2)$, построенная в теореме 6, принадлежит пространству $\tilde{N}^\infty\left(\mathbb{R}^2/l\right)$ и является решением задачи (11)-(13).

Первые результаты исследования задачи (8)-(10) содержатся в [13].

Стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности.

Рассмотрим задачу

$$\Delta U(x_1,x_2)+k'(x_2)\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0,$$
$$x=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2/l, \qquad (18)$$

$$U(x_1,+0)-U(x_1,-0)=$$
$$=e^{-\frac{k(0)}{2}}q_0(x_1),\ x_1\in(-1;1), \qquad (19)$$

$$\frac{\partial U(x_1,+0)}{\partial x_2}+\frac{k'(0)}{2}U(x_1,+0)-$$
$$-\frac{\partial U(x_1,-0)}{\partial x_2}-\frac{k'(0)}{2}U(x_1,-0)= \qquad (20)$$
$$=e^{-\frac{k(0)}{2}}q_1(x_1),\ x_1\in(-1;1).$$

Замечание 5. В дальнейшем будем предполагать, что функция $k(x_2)$ принадлежит пространству $\tilde{N}^4\left(\mathbb{R}\right)$; существуют константы ε_1 и ε_2 такие, что при x_2, принадлежащем $\mathbb{R}$, выполнены оценки $\varepsilon_2>\tilde{k}^2(x_2)>\varepsilon_1>0$, где $\tilde{k}^2(x_2)=\left(k'(x_2)\right)^2+2k''(x_2)$.

При помощи замены $U(x_1,x_2)=e^{-\frac{k(x_2)}{2}}V(x_1,x_2)$ задача (18)-(20) сводится к задаче

$$\Delta V(x_1,x_2)-\frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}V(x_1,x_2)=0,\ x\in\mathbb{R}^2\setminus l, \qquad (21)$$

$$V(x_1,+0)-V(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in(-1;1), \qquad (22)$$

$$\frac{\partial V(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial V(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in(-1;1). \qquad (23)$$

Решение задачи (21)-(23) будем искать в виде

$$V(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+W(x_1,x_2) \qquad (24)$$

где функция $u(x_1,x_2)$ является решением задачи

$$\Delta u(x_1,x_2)-\frac{\tilde{k}^2(0)}{4}u(x_1,x_2)=0,\ x\in\mathbb{R}^2\setminus l, \qquad (25)$$

$$u(x_1,+0)-u(x_1,-0)=q_0(x_1),\ x_1\in(-1;1), \qquad (26)$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1),\ x_1\in(-1;1), \qquad (27)$$

а функция $W(x_1,x_2)$ является решением задачи

$$\Delta W(x_1,x_2)-\frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}W(x_1,x_2)=$$
$$=0{,}25\left(\tilde{k}^2(x_2)-\tilde{k}^2(0)\right)u(x_1,x_2),\ x\in\mathbb{R}^2\setminus l, \qquad (28)$$

$$W(x_1,+0)-W(x_1,-0)=0,\ x_1\in(-1;1), \qquad (29)$$

$$\frac{\partial W(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial W(x_1,-0)}{\partial x_2}=0,\ x_1\in(-1;1). \qquad (30)$$

Отметим, что задача (25)-(27) совпадает с задачей (11)-(13) при $k=\tilde{k}(0)$.

При помощи результатов, полученных при исследовании задачи (11)-(13), можно доказать следующую теорему (см. [14]).

Теорема 9. Пусть $k(x_2)\in\tilde{N}^{k+2}(\mathbb{R})$, где $k=2,\ldots$, тогда у уравнения (28) существует решение, один раз непрерывно дифференцируемое в окрестности l и k раз непрерывно дифференцируемое вне l.

Из теоремы 9 и результатов, полученных при исследовании задачи (11)-(13), получаем следующую теорему.

Теорема 10. Пусть $k(x_2)\in\tilde{N}^{k+2}(\mathbb{R})$, где $k=2,\ldots$, тогда у задачи (18)-(20) существует решение $U(x_1,x_2)$ и $U(x_1,x_2)\in C^k\left(\mathbb{R}^2\backslash l\right)$. При этом функции $U(x_1,x_2)$, $\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ в окрестности l имеют такое же асимптотическое представление, как и функции $e^{-\frac{k(x_2)}{2}}u(x_1,x_2)$, $e^{-\frac{k(x_2)}{2}}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $e^{-\frac{k(x_2)}{2}}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ соответственно, где $u(x_1,x_2)$ решение задачи (25)-(27).

Анализ результатов. Из теоремы 3, теоремы 7 и теоремы 10 следует совпадение, с точностью до постоянного сомножителя, главных членов асимптотического разложения тепловых потоков в каждой из рассмотренных задач.

Также из этих теорем следует, что скорость стремления тепловых потоков к бесконечности зависит от способа приближения к концам трещины.

Покажем это на примере поведения функции $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ в окрестности левого конца трещины l, точки с координатами $(-1;0)$. Из теоремы 3 следует, что в этом случае скорость стремления к бесконечности определяется величинами $A=\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}$ и $B=\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]$.

Рассмотрим поведение величин A и B, когда приближение к точке $(-1;0)$ осуществляется по кривой

$$\begin{cases} x_1=-1+t^\alpha, \\ x_2=t,\ t\in(0,\delta],\ \alpha>0,\ \delta<1. \end{cases} \qquad (31)$$

Из (31) получаем, что если $\alpha\le\frac{1}{2}$, то величина $A=\frac{t}{t^{2\alpha}+t^2}$ ограничена при $t\to0$. Следовательно, функция $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ стремится к бесконечности, как $\ln[t^{2\alpha}+t^2]$ при $t\to0$.

Из (31) получаем, что если $\frac{1}{2}<\alpha\le1$, то $A=\frac{t}{t^{2\alpha}+t^2}=\frac{1}{t^{2\alpha-1}}\cdot\frac{1}{1+t^{2-2\alpha}}\sim ct^{1-2\alpha}$ при $t\to0$, где $c=1$ при $\frac{1}{2}<\alpha<1$ и $c=\frac{1}{2}$ при $\alpha=1$. Следовательно, функция $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ стремится к бесконечности, как $ct^{1-2\alpha}$ при $t\to0$.

Из (31) получаем, что если $1<\alpha$, то $A=\frac{t}{t^{2\alpha}+t^2}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t^{2\alpha-2}}\sim t^{-1}$ при $t\to0$. Следовательно, функция $\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ стремится к бесконечности, как t^{-1} при $t \to 0$.

Ниже на рисунке показано поведение главных членов асимптотического разложения функции $\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ в окрестности точки $(-1;0)$ при условии, что $q_0(-1) = q_1(-1) = 1$.

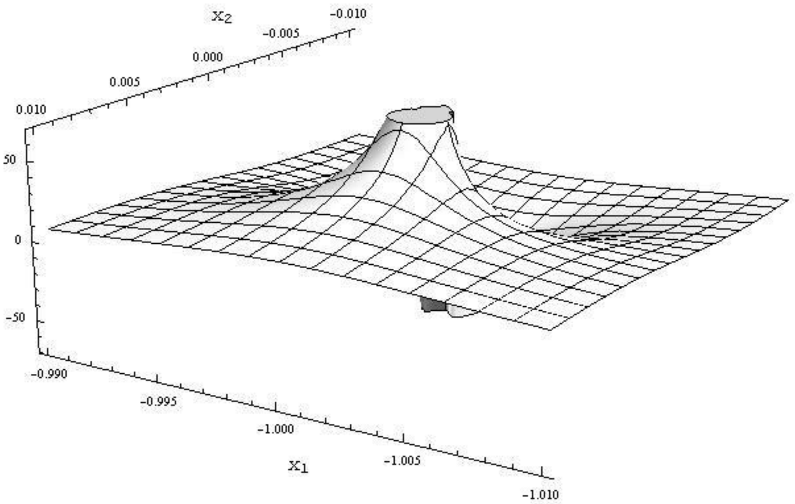

Рис. Поведение главных членов асимптотического разложения функции

Библиографический список

1. **Lee, K. Y.** Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K. Y. Lee, S. -J. Park // Eng. Fract. – 1995. – Mech. 50. – N 4. – P. 475–482.

2. **Ордян, М. Г.** Задача теплопроводности для биматериала с системой частично теплопроницаемых трещин и тепловым источником / М. Г. Ордян, В. Е. Петрова // Вестник Самарского государственного университета (Естественнонаучная серия). – 2009. – №4(70). – С. 154–170.

3. **Petrova, V.** Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // Teoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2011. – V. 55. – P. 148–157.

4. **Glushko, A. V.** Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety”: Book of Abstracts, 26-31 August. – Kazan, 2012. – P. 269.

5. **Glushko, A. V.** Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety”: сб. ст. [Электронный ресурс]. – Kazan: Foliant, 2012. – 1 электрон. опт. диск. (CD-Rom).

6. **Логинова, Е. А.** Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вест-

References

1. **Lee, K. Y.** Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow / K. Y. Lee, S. -J. Park // Eng. Fract. – 1995. – Mech. 50, N 4. – P. 475–482.

2. **Ordyan, M. G.** Zadacha teploprovodnosti dlya bimateriala s sistemoy chastichno teplopronitsaemyih treschin i teplovyim istochnikom / M. G. Ordyan, V. E. Petrova // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta (Estestvennonauchnaya seriya). – 2009. – №4(70). – S. 154–170.

3. **Petrova, V.** Thermal fracture of a functionally graded/homogeneous bimaterial with a system of cracks / V. Petrova, S. Schmauder // Teoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2011. – V. 55. – P. 148–157.

4. **Glushko, A. V.** Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety”: Book of Abstracts, 26-31 August. – Kazan, 2012. – P. 269.

5. **Glushko, A. V.** Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety”: sb. ct. [Elektronnyiy resurs]. – Kazan: Foliant, 2012. – 1 elektron. opt. disk. (CD-Rom).

6. **Loginova, E. A.** Postroenie resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treschinoy / E. A. Loginova // Vestnik SPbGU Ser. 1.

ник СПбГУ Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2012. – Вып. 1. – С. 40–47.

7. **Chiu Tz-Cheng**. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack / Tz-Cheng Chiu, Shang-Wu Tsai, Ching-Hwei Chue // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2013. – V. 67. – P. 514–522.

8. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

9. **Владимиров, В. С.** Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин [и др.]. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

10. **Рябенко, А. С.** Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в однородной плоскости с трещиной / А. С. Рябенко // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 187–194.

11. **Ватсон, Г. Н.** Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 799 с.

12. **Никольский, С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. – 456 с.

13. **Глушко, А. В.** Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 47–50.

14. **Михайлов, В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных/ В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

Matematika. Mehanika. Astronomiya. – 2012. – Vyip. 1. – S. 40–47.

7. **Chiu Tz-Cheng**. Heat conduction in a functionally graded medium with an arbitrarily oriented crack / Tz-Cheng Chiu, Shang-Wu Tsai, Ching-Hwei Chue // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2013. – V. 67. – P. 514–522.

8. **Vladimirov, V. S.** Uravneniya matematicheskoy fiziki / V. S. Vladimirov. – M.: Nauka, 1976. – 527 c.

9. **Vladimirov, V. S.** Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki / V. S. Vladimirov, V. P. Mihaylov, A. A. Vasharin [i dr.]. – M.: Nauka, 1982. – 256 s.

10. **Ryabenko, A. S.** Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v odnorodnoy ploskosti s treschinoy / A. S. Ryabenko // Vestnik VGU. Ser. Fizika. Matematika. – 2012. – № 1. – S. 187–194.

11. **Vatson, G. N.** Teoriya besselevyih funktsiy / G. N. Vatson. – M.: Izdatelstvo inostrannoy literaturyi, 1949. – 799 s.

12. **Nikolskiy, S. M.** Priblizhenie funktsiy mnogih peremennyih i teoremyi vlozheniya / S. M. Nikolskiy. – M. : Gl. red. fiz.-mat. lit. izd-va «Nauka», 1977. – 456 s.

13. **Glushko, A. V.** Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treschinoy / A. V. Glushko, E. A. Loginova // Vestnik VGU. Ser. Fizika. Matematika. – 2010. – № 2. – S. 47–50.

14. **Mihaylov, V. P.** Differentsialnyie uravneniya v chastnyih proizvodnyih/ V. P. Mihaylov. – M.: Nauka, 1976. – 391 s.

ON THE STATIONARY HEAT DISTRIBUTION IN FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS WITH AN INSIDE CRACK

Ryabenko A. S.
Candidate of Physical and Mathematical sciences, associate professor
Voronezh State University, Russia, Voronezh
Tel. (473) 220-86-18, E-mail: alexr-83@yandex.ru

Three problems are dealt with associated with stationary heat distribution in a plane with no heat sources and a crack when the coefficient of internal thermal conductivity is stable and equal to an exponential function and arbitrary function which satisfies some supplementary conditions. In all the problems that have so far been looked into, a crack is modelled with a segment and the difference of the temperature and heat fluxes between the upper and lower edges of the crack is supposed to be specified. All the problems were shown to have a solution. Clear-cut solutions were developed for when the coefficient of internal thermal conductivity is stable. In all the problems examined asymptomatic presentations for hear fluxes were obtained in the vicinity of the edges of the crack. The major members of asymptomatic division of the heat fluxes were proved to be identical for all the problems. The rate of heat fluxes tending to infinity is shown to depend on how the edges of the crack are approached.

Keywords: *a crack, heat flow, singularity, steady heat distribution, general solution, asymptotics, stationary heat conductivity.*