ПОЖАРНАЯ ТЕХНИКА

УДК 681.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА КВАДРОКОПТЕРА

Н.И. Попов, О.В. Емельянова, С.Ф. Яцун

В работе рассмотрены вопросы математического моделирования движения квадрокоптера, приведена его расчетная схема и составлены дифференциальные уравнения на основе общих теорем динамики.

Ключевые слова: *квадрокоптер, углы Эйлера-Крылова, матрица поворота.*

Введение. Квадрокоптер – это летательный аппарат с четырьмя несущими винтами, вращающимися диагонально в противоположных направлениях. Он обладает рядом преимуществ, таких как: беспилотное управление, надежность, компактность, маневренность, малая взлетная масса при существенной массе полезной нагрузки. Благодаря простоте конструкции квадрокоптеры часто используются в любительском моделировании, удобны для недорогой аэрофото- и киносъёмки — громоздкая камера вынесена из зоны действия винтов.

Первое миниатюрное радиоуправляемое судно было предложено 1898 году Николой Тесла. Вдохновленной этой идеей, в 1910 г. американский военный инженер из Огайо Чарльз Кеттеринг предложил модель летательного аппарата без человека.

В СССР в 1930-1940 гг. авиаконструктором Никитиным разрабатывался торпедоносец-планер специального назначения (ПСН-1 и ПСН-2) типа «летающее крыло» в двух вариантах: пилотируемый тренировочно-пристрелочный и беспилотный с полной автоматикой. К началу 1940 г. был представлен проект беспилотной летающей торпеды с дальностью полёта от 100 км и выше (при скорости полёта 700 км/ч).

Попов Н.И. кандидат тех. наук, Воронежский институт ГПС МЧС России, Россия, г. Воронеж.
Емельянова О.В., кандидат тех. наук, ЮЗГУ, Россия, г. Курск; teormeh@inbox.ru.
Яцун С.Ф., доктор тех. наук, ЮЗГУ, Россия, г. Курск, teormeh@inbox.ru

В 1944 году военными США в был применён впервые в мире классический ударный БПЛА — Interstate TDR. Однако дальше прототипов дело не продвинулось.

Новое рождение мультикоптеры получили в XXI веке. Современные мультикоптеры используют бесколлекторные электродвигатели и литий-полимерные аккумуляторы в качестве источника энергии. Это накладывает определенные ограничения на их полетные характеристики: типичный вес мультикоптера и время полета.

Для изучения основных закономерностей движения квадрокоптера рассмотрим математическую модель, описывающую пространственное движение летающего робота. Квадрокоптер – это электромеханическая система, корпус которой можно моделировать твердым телом с 6-ю степенями свободы [3].

Математическая модель квадрокоптера. Различные виды движения квадрокоптера было подробно описаны в [1, 3-7]. Пусть положение центра масс квадрокоптера C совпадает с началом подвижной системы координат $CX_1Y_1Z_1$, а в неподвижной декартовой системе координат описывается координатами X, Y, Z (рис.1).

Ориентацию в пространстве задают углы Эйлера-Крылова, которые обычно применяются в авиационной технике при описании движения аппарата и составляют так называемые углы: крена, тангажа и рысканья. Они соответствуют следующей последовательности поворотов:

1. Поворот на угол ψ относительно вертикальной оси OZ $(R\ z,\psi)$ — рыскание.

2. Поворот на угол θ относительно главной поперечной оси инерции OY (R y,θ) — тангаж.

3. Поворот на угол φ вокруг продольной оси OX (R x,φ) — крен.

При полёте квадрокоптера на него действуют аэродинамические силы несущих винтов $\bar F_1$, $\bar F_2$, $\bar F_3$, $\bar F_4$, приложенные к их центрам масс роторов A_1, A_2, A_3 ,A_4 соответственно, и силы тяжести корпуса $m_C g$ и винтов $m_i g$ (рис. 1) [1-3], причем силы $\bar F_i$ параллельны оси CZ_1.

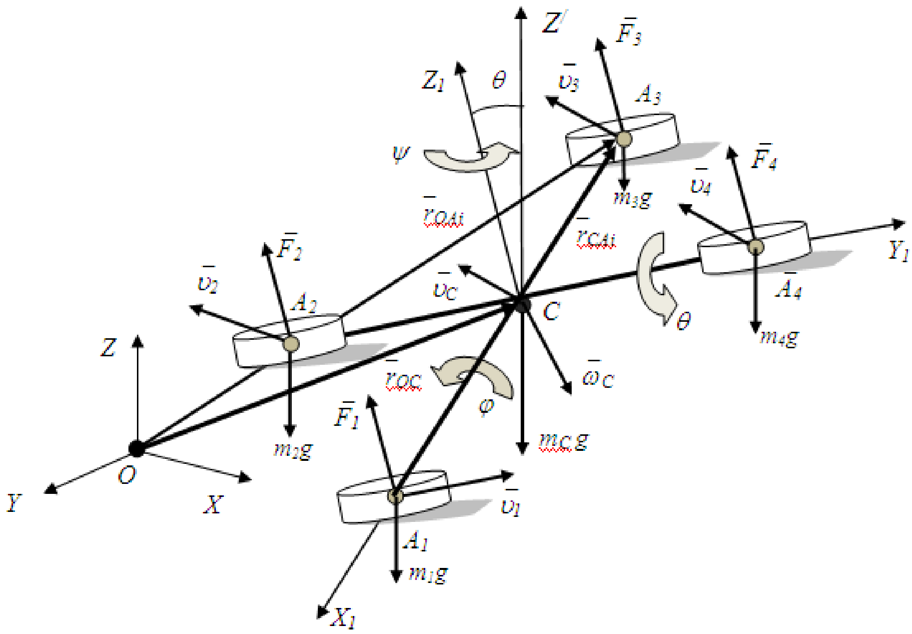

Рис. 1. *Расчетная схема квадрокоптера*

Положение центра масс квадрокоптера определяют координаты вектора $r_{OC}=[X,Y,Z]^{\mathrm{T}}$. Условимся в дальнейшем системы координат $OXYZ$ и $CX_1Y_1Z_1$ понимать под символами $^{(0)}$ и $^{(1)}$ соответственно. Тогда векторы сил :

$$F_i^{(0)}=T_{10}\cdot F_i^{(1)} \tag{1}$$

где T_{10} - матрица перехода из $^{(1)}$ в $^{(0)}$ систему координат.

Результирующая матрица перехода получается путем перемножения трёх основных матриц вращения и имеет следующий вид:

$$T_{10}=(\psi,\theta,\varphi)=R(z,\psi)\times R(y,\theta)\times R(x,\varphi)=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\varphi\sin\theta-\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta-\cos\psi\sin\varphi\\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta\end{bmatrix} \tag{2}$$

Запишем очевидное равенство:

$$r_{OA_i}^{(0)}=\bar r_{OC}^{(0)}+\bar r_{CA_i}^{(0)} \tag{3}$$

где

$$\bar r_{CA_i}^{(0)}=T_{10}\cdot\bar r_{CA_i}^{(1)} \tag{4}$$

Векторы $\bar r_{CA_i}^{(1)}$ для точек A_i имеют вид:

$$\bar r_{CA1}^{(1)}=\begin{vmatrix}l\\0\\0\end{vmatrix},\quad \bar r_{CA_2}^{(1)}=\begin{vmatrix}0\\-l\\0\end{vmatrix},\quad \bar r_{CA_3}^{(1)}=\begin{vmatrix}-l\\0\\0\end{vmatrix},\quad \bar r_{CA_i}^{(1)}=\begin{vmatrix}0\\l\\0\end{vmatrix} \tag{5}$$

,

где l – расстояние от центра масс квадрокоптера C до центра масс роторов $A_{i.}$

Скорости точек A_i определим, продифференцировав равенство (3) по времени:

$$\bar{\upsilon}_{A_i} = \frac{\bar{r}^{(0)}_{OA_i}}{dt} = \frac{\bar{r}^{(0)}_{OC}}{dt} + \frac{\bar{r}^{(0)}_{CA_i}}{dt} \tag{6}$$

С учетом равенства (4) получим:

$$\bar{\upsilon}_{A_i} = \bar{\upsilon}_C + \dot{T}_{10} \cdot \bar{r}^{(1)}_{CA_i} \tag{7}$$

где $\bar{\upsilon}_C = \bar{i}\dot{X} + \bar{j}\dot{Y} + \bar{k}\dot{Z}$ - скорость центра масс квадрокоптера.

Количество движения i-ой массы определим по формуле:

$$\bar{q}_i = m_i \bar{\upsilon}_{A_i} = m_i (\bar{\upsilon}_C + \dot{T}_{10} \cdot \bar{r}^{(1)}_{CA_i}) \tag{8}$$

Изменение количества движения определим из выражения:

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = m_i \left(\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \cdot \bar{r}^{(1)}_{CA_i}\right) = T_{10}\bar{F}^{(1)}_i \tag{9}$$

Вектор количества движения рассматриваемой системы, состоящей из корпуса и 4 винтов, определим по формуле:

$$\bar{Q} = m_C \bar{\upsilon}_C + \sum_{i=1}^{4} m_{Ai} \bar{\upsilon}_{Ai} \tag{10}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме имеет вид:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m_C \frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \sum m_i \left(\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \cdot \bar{r}^{(1)}_{CA_i}\right) = \left(m_C + \sum m_i\right)\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \sum m_i \bar{r}^{(1)}_{CA_i} = T_{10} \sum \bar{F}^{(1)}_i \tag{11}$$

В проекциях на координатные оси уравнение (11) примет вид:

$$\begin{cases} \left(m_C + \sum m_i\right)\dfrac{d\bar{\upsilon}^X_C}{dt} = \sum F^{(0)}_{ix} \\ \left(m_C + \sum m_i\right)\dfrac{d\bar{\upsilon}^Y_C}{dt} = \sum F^{(0)}_{iy} \\ \left(m_C + \sum m_i\right)\dfrac{d\bar{\upsilon}^Z_C}{dt} = \sum F^{(0)}_{iz} \end{cases} \tag{12}$$

Здесь:

$$\sum \bar{F}^{(0)}_i = T_{10} \sum \bar{F}^{(1)}_i = |T_{10}| \begin{vmatrix} \sum F^{(1)}_{ix} \\ \sum F^{(1)}_{iy} \\ \sum F^{(1)}_{iz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \sin\theta) \cdot \sum F_i \\ (\cos\varphi \sin\psi \sin\theta - \cos\psi \sin) \cdot \sum F_i \\ \cos\varphi \cos\theta \cdot \sum F_i \end{vmatrix} \tag{13}$$

где

$$\bar{F}^{(1)}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \end{vmatrix}, \quad \bar{F}^{(1)}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2 \end{vmatrix}, \quad \bar{F}^{(1)}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{vmatrix}, \quad \bar{F}^{(1)}_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F_4 \end{vmatrix}$$

$$\sum \bar{F}^{(1)}_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{4} F_i \end{vmatrix} \tag{14}$$

Тогда уравнение (13) с учетом (14) будет иметь вид:

$$\begin{cases} (m_C + \sum m_i)\dfrac{d\overline{\upsilon}_C^X}{dt} = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\sin\theta)\cdot\sum F_i \\ (m_C + \sum m_i)\dfrac{d\overline{\upsilon}_C^Y}{dt} = (\cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin)\cdot\sum F_i \\ (m_C + \sum m_i)\dfrac{d\overline{\upsilon}_C^Z}{dt} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\sum F_i \end{cases} \quad (15)$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{X} = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\sin\theta)\cdot\sum F_i \\ m\ddot{Y} = (\cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin)\cdot\sum F_i \\ m\ddot{Z} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\sum F_i \end{cases} \quad (16)$$

Представленная система дифференциальных уравнений описывает изменение обобщенных координат квадрокоптера X,Y,Z.

Рассмотрим угловые скорости вращения роторов квадрокоптера в локальной системе координат $CX_1Y_1Z_1$ (рис.2, 3). Для этого введем систему координат $A_ix_iy_iz_i$, которая совпадает с центром масс m_i роторов.

$$\overline{\Omega}_i = \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_C, \quad i = 1 \ldots 4; \quad (17)$$

$$\overline{\omega}_i = \bar{i}_i\omega_{ix} + \bar{j}_i\omega_{iy} + \bar{k}_i\omega_{iz}; \quad (18)$$

$$\overline{\omega}_C = \bar{i}_1\omega_{CX_1} + \bar{j}_1\omega_{CY_1} + \bar{k}_1\omega_{CZ_1}$$

где i_1, j_1, k_1 и i_i, j_i, k_i - единичные векторы системы координат $CX_1Y_1Z_1$ и $A_ix_iy_iz_i$, $\overline{\Omega}_i$ - абсолютная угловая скорость вращения i-ого ротора в системе координат $CX_1Y_1Z_1$; $\overline{\omega}_C$, $\overline{\omega}_i$ - векторы угловых скоростей вращения корпуса и i-ого ротора в системе координат $CX_1Y_1Z_1$ и $A_ix_iy_iz_i$ определяются в виде:

$$\overline{\omega}_C = \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_{Z_1} \end{vmatrix}, \quad \overline{\omega}_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_i \end{vmatrix}, \quad \overline{\Omega}_i = \begin{vmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} \quad (19)$$

или

$$\overline{\Omega}_i = \bar{i}_1\Omega_x + \bar{j}_1\Omega_y + \bar{k}_1\Omega_z \quad (20)$$

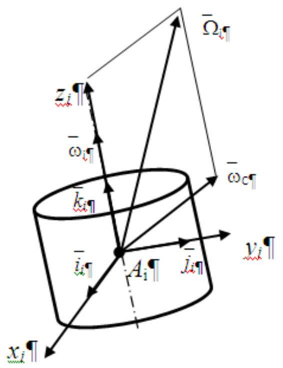

Рис.2. *Схема для определения угловой скорости ротора при сложном движении*

Определим момент количества движения ротора в системе координат $A_ix_iy_iz_i$

$$\overline{L}_{iA_i} = \int_{m_i}\left(\overline{r}_i \times \overline{\upsilon}\right)dm_i \quad \text{или} \quad \overline{L}_{iA_i} = I_{Ai}\overline{\Omega}_i \quad (21)$$

где $I_{iA_i} = \begin{vmatrix} J_{Ai}^x & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^y & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^z \end{vmatrix}$ - тензор инерции ротора. Тогда кинетический момент равен:

$$\bar{L}_{iA_i}=\begin{vmatrix} J_{Ai}^{x} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^{y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^{z} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_i+\omega_{Z_1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} J_{Ai}^{x}\omega_{X_1} \\ J_{Ai}^{y}\omega_{Y_1} \\ J_{Ai}^{z}\left(\omega_i+\omega_{Z_1}\right) \end{vmatrix} \qquad (22)$$

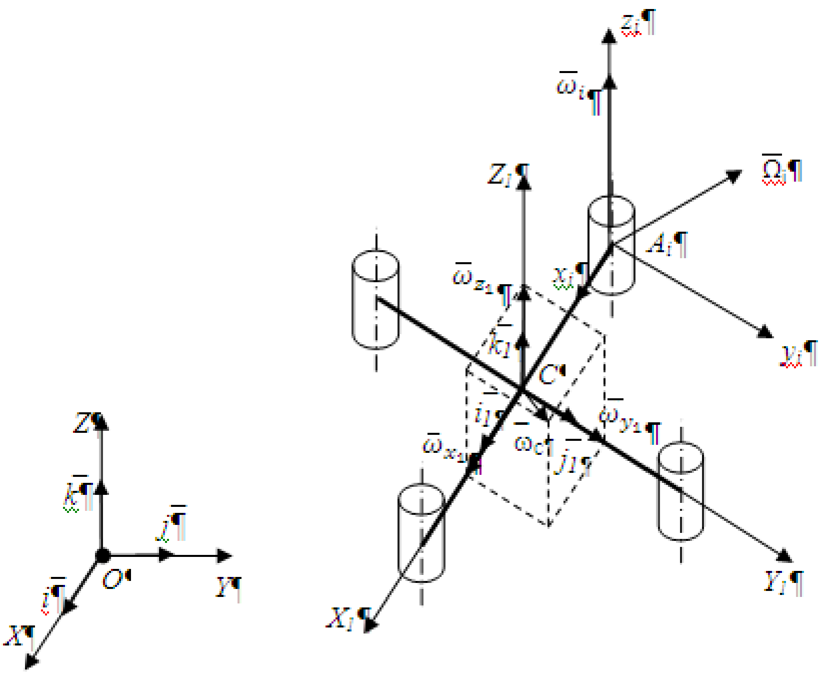

Рис. 3. *Расчетная схема определения кинетического момента квадрокоптера*

Определим момент количества движения в системы:

$$\bar{L}=\bar{L}_C+\sum\bar{L}_i \qquad (23)$$

где $\bar{L}_C=I_C\bar{\omega}_C$ - кинетический момент относительно центра масс квадрокоптера; $\bar{L}_i=I_i\bar{\Omega}_i=(I_{A_i}+ml^2)\,\bar{\Omega}_i$ - кинетический момент i-го ротора относительно центра масс квадрокоптера в системе координат $CX_1Y_1Z_1$ (в соответствии с теоремой Гюйгенса).

Тензоры инерции корпуса I_C и i-го ротора I_i с учетом того, что главные оси инерции механической системы являются главными центральными осями инерции (все центробежные моменты инерции равны нулю) равны:

$$I_C=\begin{vmatrix} J_C^{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_C^{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_C^{Z_1} \end{vmatrix};\quad I_i=\begin{vmatrix} J_{A_i}^{x}+m_il^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^{y}+m_il^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^{z}+m_il^2 \end{vmatrix} \qquad (24)$$

Тогда:

$$\bar{L}_C=\begin{vmatrix} J_C^{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_C^{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^{Z_1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_{Z_1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} J_C^{X_1}\omega_{X_1} \\ J_C^{Y_1}\omega_{Y_1} \\ J_C^{Z_1}\omega_{Z_1} \end{vmatrix} \qquad (25)$$

$$\overline{L}_i = \begin{vmatrix} J_{A_i}^x + m_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^y + m_i l^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^z + m_i l^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (J_{A_i}^x + m_i l^2)\omega_{X_1} \\ (J_{Ai}^y + m_i l^2)\omega_{Y_1} \\ (J_{Ai}^z + m_i l^2)(\omega_i + \omega_{Z_1}) \end{vmatrix} \tag{26}$$

С учетом (25), (26) выражение (23) будет иметь вид:

$$L = \begin{vmatrix} (J_C^{X_1} + \sum J_{A_i}^x + \sum m_i l^2)\,\omega_{X_1} \\ (J_C^{Y_1} + \sum J_{Ai}^y + \sum m_i l^2)\,\omega_{Y_1} \\ (J_C^{Z_1} + \sum J_{Ai}^z + \sum m_i l^2)\,\omega_{Z_1} + (\sum J_{Ai}^z + \sum m_i l^2)\,\omega_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J^{X_1}\omega_{X_1} \\ J^{Y_1}\omega_{Y_1} \\ J^{Z_1}\omega_{Z_1} + \sum J_i^z \omega_i \end{vmatrix} \tag{27}$$

,

где $J^{X_1} = J_C^{X_1} + \sum J_{A_i}^x + \sum m_i l^2$, $J^{Y_1} = J_C^{Y_1} + \sum J_{Ai}^y + \sum m_i l^2$, $J^{Z_1} = J_C^{Z_1} + \sum J_{Ai}^z + \sum m_i l^2$, $\sum J_i^z = \sum J_{Ai}^z + \sum m_i l^2$ - приведенные осевые моменты инерции.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы:

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \frac{d\overline{L}}{dt} + \left(\overline{\omega}_C \times \overline{L}\right) = \sum \overline{M}_C^e \tag{28}$$

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \begin{vmatrix} J^{X_1}\dot{\omega}_{X_1} + \omega_{Y_1}\omega_{Z_1}\left(J_i^{Z_1} - J^{Y_1}\right) + \omega_{Y_1}\sum J_i^z \omega_i \\ J^{Y_1}\dot{\omega}_{Y_1} + \omega_{X_1}\omega_{Z_1}\left(J^{X_1} - J_i^{Z_1}\right) - \omega_{X_1}\sum J_i^z \omega_i \\ J^{Z_1}\dot{\omega}_{Z_1} + J_i^z \dot{\omega}_i + \omega_{X_1}\omega_{Y_1}\left(J^{Y_1} - J^{X_1}\right) \end{vmatrix} = \begin{matrix} M_{X_1}^e \\ M_{Y_1}^e \\ M_{Z_1}^e \end{matrix} \tag{29}$$

В результате на основании (16) и (29) получаем систему дифференциальных уравнений, описывающие движение квадрокоптера:

$$\begin{cases} m\ddot{X} = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\sin\theta)\cdot\sum F_i \\ m\ddot{Y} = (\cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin)\cdot\sum F_i \\ m\ddot{Z} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\sum F_i \\ J^{X_1}\dot{\omega}_{X_1} + \omega_{Y_1}\omega_{Z_1}\left(J_i^{Z_1} - J^{Y_1}\right) + \omega_{Y_1}\sum J_i^z\omega_i = M_{X_1}^e \\ J^{Y_1}\dot{\omega}_{Y_1} + \omega_{X_1}\omega_{Z_1}\left(J^{X_1} - J_i^{Z_1}\right) - \omega_{X_1}\sum J_i^z\omega_i = M_{Y_1}^e \\ J^{Z_1}\dot{\omega}_{Z_1} + J_i^z\dot{\omega}_i + \omega_{X_1}\omega_{Y_1}\left(J^{Y_1} - J^{X_1}\right) = M_{Z_1}^e \end{cases} \tag{30}$$

Систему уравнений (30) необходимо решать совместно с кинематическими соотношениями, выражающие проекции угловой скорости тела на оси связанной системы координат через угловые скорости углов крена, тангажа и рысканья:

$$\begin{cases} \omega_{X_1} = \dot{\varphi} + \psi\sin\theta \\ \omega_{Y_1} = \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_{Z_1} = \dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \end{cases} \tag{31}$$

Полученные системы уравнений (30), (31) необходимы для моделирования движения летающего робота.

Выводы. Предложена математическая модель квадрокоптера с учетом массогабаритных свойств четырёх электроприводов, снабженных редуктором. В дальнейшем планируется разработать алгоритм численного решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение квадрокоптера по заданной траектории при наличии режима стабилизации положения системы в пространстве по трем углам ψ, θ, φ. Также планируется создать адаптивный алгоритм, который заключается в использовании различных методик стабилизации при различных режимах и условиях полёта. Решить задачу оптимального синтеза по .

критерию быстродействия при перемещении квадрокоптера из одной точки в другую

Библиографический список

1. **Емельянова, О.В., Попов, Н.И., Яцун, С.Ф.** Моделирование движения квадроротационного летающего робота / О.В. Емельянова, Н.И. Попов, С.Ф. Яцун // Актуальные вопросы науки. Материалы VIII Международной научно-практической конференции – М.: Спутник+, 2013. - С.6-8.
2. **Загордан, А.М.** Элементарная теория вертолёта / А.М. Загордан. – М.: Военное издательство Министерства обороны Союза ССР, 1955.
3. **Яцун, С.Ф., Емельянова, О.В., Попов, Н.И.** Изучение движения квадрокоптера в вертикальной плоскости / С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова, Н.И. Попов // Актуальные вопросы технических наук (II): материалы международной заоч. науч. конф. - Пермь: Меркурий, 2013. - С.66-69.
4. **Bresciani, T.** Modeling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Department of Automatic control, Lund University, October 2008, p.170.
5. **Tahar, M., Zemalache, K.M., Omari, A.** Control of under-actuated X4-flyer using indegral Backstepping controller. Przeglad elektrotechniczny (Electrical review), ISSN 0033-2097, R.87 NR 10/2011, pages 251-256.
6. **Hoffmann F., Goddemeier N., Bertram T.** Attitude estimation and control of a quadrocopter/ The 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Taipei, Taiwan. October 2010, pages 1072-1077.
7. **Tommaso, Bresciani.** Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter (Modellering, identifiering och reglering av en quadrotor helikopter). Department of Automatic Control Lund University October 2008.

References

1. **Emelyanova O.V., Popov N.I., Yatsun S.F.** Modelirovanie dvizheniya kvadrorotatsionnogo letayu-schego robota / O.V. Emelyanova, N.I. Popov, S.F. Yatsun // Aktualnyie voprosyi nauki. Materialyi VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii – M.: Sputnik , 2013. - S.6-8.
2. **Zagordan A.M.** Elementarnaya teoriya vertolYota / A.M. Zagordan. – M.: Voennoe izdatelstvo Ministerstva oboronyi Soyuza SSR, 1955.
3. **Yatsun S.F., Emelyanova O.V., Popov N.I.** Izuchenie dvizheniya kvadrokoptera v vertikalnoy ploskosti / S.F. Yatsun, O.V. Emelyanova, N.I. Popov // Aktualnyie voprosyi tehnicheskih nauk (II): materialyi mezhdunarodnoy zaoch. nauch. konf. - Perm: Merkuriy, 2013. - S.66-69.
4. **Bresciani T.** Modeling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Department of Automatic control, Lund University, October 2008, p.170.
5. **Tahar M., Zemalache K.M., Omari A.** Control of under-actuated X4-flyer using indegral Backstepping controller. Przeglad elektrotechniczny (Electrical review), ISSN 0033-2097, R.87 NR 10/2011, pages 251-256.
6. **Hoffmann F., Goddemeier N., Bertram T.** Attitude estimation and control of a quadrocopter/ The 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Taipei, Taiwan. October 2010, pages 1072-1077.
7. **Tommaso Bresciani.** Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter (Modellering, identifiering och reglering av en quadrotor helikopter). Department of Automatic Control Lund University October 2008.

MODELLING OF DYNAMICS OF FLIGHT OF A QUADROTOR HELICOPTER

Popov N.I., Ph. D. in Engineering,
Voronezh Institute of State Fire Service of EMERCOM of Russia;
Russia, Voronezh
Emelianova O.V., South-West state university,
teormeh@inbox.ru;
Jatsun S.F. D. Sc. in Engineering,
South-West state university,
teormeh@inbox.ru.

In work questions of mathematical modeling of movement of a quadrotor helicopter are considered, his settlement scheme is provided and the differential equations on the basis of the general theorems of dynamics are worked out.

Keywords: *modelling, identification and control of a quadrotor helicopter*